

华南理工大学
2016年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学, 应用数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 运筹学与控制论

共3页

1. (12分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right).$$

2. (12分) 确定 a, b 的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(1 - \cos ax), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \ln(b + x^2), & x > 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可导, 并求它的导数.

3. (12分) 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}.$$

4. (12分) 讨论函数

$$y = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的连续性, 并指出间断点类型.

5. (12分) 设 a, b 为常数, 讨论积分

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

的收敛性.

6. (12分) 证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$$

是发散的.

7. (13分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

8. (13分) 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0, 0)$ 处不连续, 而 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

9. (13分) (1) 将 $\arctan x$ 展开成幂级数, 求收敛半径.

(2) 利用(1)证明

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \cdots$$

(3) 利用(2)中的公式近似计算 π 的值, 需要多少项的和, 误差不会超过 10^{-m} (m 为自然数).

10. (13分) 设在某闭矩形区域 D 内

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

试证

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

为 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 其中 $C = u(x_0, y_0)$.

11. (13分) 计算下列曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

所围成的体积.

12. (13分) 设 k 是常数, L 为曲线 $x^2 + xy + y^2 = r^2$, 依逆时针方向. 定义

$$I(r) = \oint_L \frac{xdy - ydx}{(x^2 + y^2)^k}.$$

求 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r)$.